Beiträge
zur Theorie der Convergenz unendlicher Reihen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der philosophischen Facultät

der Universität Rostock

vorgelegt

von

Gustav Kohn

aus Siegen.

(1879)

Greifswald.

Druck der Universitäts-Buchdruckerei von F. W. Kunike.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553624_0204

Beiträge zur Theorie der Convergenz unendlicher Reihen.

Von

Gustav Kohn,

Gymnasiallehrer in Minden.

§ 1.

Die gebräuchlichen Kriterien über die Convergenz oder Divergenz der unendlichen Reihen mit positiven abnehmenden Gliedern von der Form

$$U = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$
$$(\lim u_n = 0 \text{ für } n = \infty)$$

zerfallen im wesentlichen:

1) in solche, die sich auf die Veränderung des Gliedes u_n selbst,

2) in solche, die sich auf die Veränderung des Quotienten $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ beziehen.

Die Kriterien der ersten Art, wie sie von Cauchy, dann auch für schwächere Grade der Convergenz und Divergenz von Morgau und nach des letzteren Vorgang in anderen Formen von Bertrand, Bonnet, Paucker [1]) aufgestellt wurden, finden ihren klarsten, dem

1) Cauchy, cours de analyse algébrique p. 135.

Morgau in seinem 1839 zu London erschienen Lehrbuch der Differenzial- und Integralrechnung.

ihnen zu Grunde liegenden Princip der Reihenvergleichung entsprechenden Ausdruck bei Bonnet:

Die Reihe mit dem Glied u_n ist convergent, wenn von einem bestimmten Werte des n an beständig bleibt

$$u_n < \frac{\delta}{n^{1+k}}, \quad u_n < \frac{\delta}{n(l_n)^{1+k}}, \quad \ldots \quad u_n < \frac{\delta}{nl_n l_2 n \ldots (l_r n)^{1+k}};$$

die Reihe ist divergent, wenn

$$u_n > \frac{\delta}{n}, \quad u_n > \frac{\delta}{nl_n}, \quad \ldots \quad u_n > \frac{\delta}{nl_n l_2 n \ldots l_r n},$$

wo δ und k positive endliche Zahlen bedeuten.

Ueber die Convergenz oder Divergenz derjenigen Reihen, welche zur Aufstellung der erwähnten Kriterien benutzt worden sind, liess sich entscheiden durch zwei Sätze von Cauchy[1]):

Die Reihen

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

und

$$au_a + a^2 u_{a^2} + \ldots + a^n u_{a^n} + \ldots$$

convergiren oder divergiren gleichzeitig, wenn a eine ganze Zahl ist; und

Ist $f(x)$ eine stetige Function von x, welche von einem bestimmten Werte an, z. B. $f(1)$, dasselbe Vorzeichen behält und abnimmt ohne Aufhören mit $\frac{1}{x}$, so convergirt oder divergirt die Reihe

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots$$

gleichzeitig mit der primitiven Function $F(x)$.

Bertrand, règles sur la convergence des séries. Liouville's Journal Ser. 1. Bd. 7. p. 35.

Bonnet, note sur la convergence et la divergence des séries. Liouv. Journ. Ser. 1. Bd. 8. p. 77.

Paucker, note relative à quelqnes règles sur la convergence des séries. Crelle's Journ. Bd. 42. p. 138.

1) Cauchy, cours d'analyse alg. p. 135. und sur la convergence des séries. Exercices de math. Bd. 2. p. 221.

Ein die Convergenz oder Divergenz aller Reihen entscheidendes Kriterium der ersten Art in specieller Form aufzustellen, wäre nur dann möglich, wenn eine Reihe V bekannt wäre der Art, dass, wenn man

$$u_n = \varrho_n v_n$$

setzte, die Reihe U jedesmal divergirte, sobald

$$\lim \varrho_n = \infty,$$

in allen andern Fällen aber convergirte; oder, dass U convergirte, sobald

$$\lim \varrho_n = 0,$$

in allen andern Fällen aber divergirte. Es würde dann das eine Mal V den denkbar geringsten Grad der Convergenz, das andre Mal den denkbar geringsten Grad der Divergenz besitzen. Dass eine derartige Reihe nicht existirt, ist schon von Abel [1]) nachgewiesen worden. Auch eine fortgesetzte Anwendung der logarithmischen Kriterien genügt nicht, um alle Fälle der Convergenz und Divergenz zu erschöpfen [2]). — Einen allgemeinen Ausdruck für den Gedanken, auf dessen Anwendung in speciellen Fällen die gebräuchlichen Kriterien der ersten Art beruhen, giebt du Bois-Reymond [3]):

Bringt man das Glied u_n irgend einer Reihe U auf die Form

$$\frac{1}{\lambda_n}\{V(n) - V(n+1)\},$$

so convergirt die Reihe U stets, wenn die Differenzen $V(n) - V(n+1)$ ihr Vorzeichen nicht wechseln, $\lim V(n)$ endlich und $\lim \lambda_n$ nicht gleich Null wird; sie divergirt stets, wenn die Differenzen $V(n) - V(n+1)$ ihr Vorzeichen nicht wechseln, $\lim V(n)$ unendlich gross und $\lim \lambda_n$ nicht unendlich ist. Ungewissheit herrscht in dem Fall, dass $\lim V(n)$ nicht unendlich und $\lim \lambda_n$ Null oder $\lim V(n)$ unendlich und $\lim \lambda_n$ unendlich wird.

---

1) Abel, note sur le mémoire de M. Olivier ayant pour titre „remarques sur les séries infinies etc.“. Crelle's Journ. Bd. 3. p. 79. — Olivier hatte, Bd. 2. desselben Journals, p. 35. geglaubt, die Convergenz von Reihen auf die einzige notwendige und hinreichendo Bedingung zurückführen zu könneu, dass

$$\lim (nu_n) = 0.$$

2) du Bois-Reymond, eine neue Theorie der Convergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern. Crelle's Journ. Bd. 76. p. 61.

3) du Bois-Reymond, l. c.

Man erhält Kriterien für immer schwächer werdende Grade der Convergenz oder Divergenz, wenn man für $V(n)$ eine Folge von immer schwächer abnehmenden oder zunehmenden Functionen setzt. Indem du Bois-Reymond als solche Folge von Functionen wählte

$$e^{\mp\alpha n},\quad n^{\mp\alpha},\quad (ln)^{\mp\alpha},\quad \ldots\quad (l_r n)^{\mp\alpha}$$

wo α eine positive endliche Zahl, ergeben sich die bekannten, von Cauchy, Morgau etc. gebildeten Kriterien.

Auch die gebräächlichen Kriterien der zweiten Art, welche den Ausdruck $\lim \frac{u_n}{u_{n+1}}$ oder $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ zum Gegenstand haben, sind in den verschiedenen Formen, in denen sie aufgestellt wurden von Raabe, Duhamel, Bertrand, Bonnet, Paucker, Catalan [1]), gebildet auf Grund der Vergleichung mit den entsprechenden Ausdrücken derselben Reihen, welche die Kriterien der ersten Art lieferten.

Schon 1835 hatte übrigens Kummer [2]) ein allgemeines Kriterium der zweiten Art aufgestellt, welches sich allerdings nur auf den Fall der Convergenz bezieht, worin die sämmtlichen übrigen Kriterienf teilweise in den ihnen eigenen Formen enthalten sind. Dieses Kriterium stimmt überein mit dem einen Teil des von du Bois-Reymond aus seinem allgemeinen Kriterium erster Art dadurch abgeleiteten, dass er seine Function $V(n)$ setzt

$$V(n) = u_n \varphi(n).$$
$$[\lim \varphi(n) = \infty].$$

Es soll nun im Folgenden gezeigt werden, wie aus jeder Reihe neue Reihen abgeleitet werden können, welche, im Falle der Convergenz der ursprünglichen Reihe, je nach der Beschaffenheit einer einzuführenden Function, schwächer oder stärker convergiren, im

---

1) Raabe, Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Reihen- Zeitschr. für Math. und Physik, herausgegeben von Baumgartner und v. Ettingshausen. Bd. 20. p. 41.

Duhamel, nouvelle règles sur la convergence des séries. Liouv. Journ. Bd. 4. p. 214.

Bertrand l. c.

Bonnet l. c.

Paucker l. c.

Catalan, traité élémentaire des séries p. 23.

2) Kummer, Ueber die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen. Crelle's Journ. Bd. 13. p. 171.

Falle der Divergenz schwächer oder stärker divergiren, und welche so ein neues allgemeines Kriterium der ersten Art ergeben, das insofern auch Verwandtschaft mit den Kriterien der zweiten Art hat, als man den charakteristischen Ausdruck derselben $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ ersetzt durch $\frac{u_n}{n_{f(n)}}$, wo $f(n)$ eine Function ist, welche gleichtig mit n unendlich gross wird.

§ 2.

I) Lehrsatz: Wenn u eine Function von x ist, welche von einem bestimmten Wert der unabhängigen Veränderlichen an, z. B. $x = 1$, eindeutig, stetig und positiv ist, welche überdies derartig fällt, dass

$$\lim u_x = 0 \quad \text{für} \quad x = 0;$$

wenn ferner $f(x)$ eine eindeutige, positive, für endliche Werte von x endliche Function ist, welche gleichzeitig mit x unendlich wird; dann divergirt im Fall der Divergenz von

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

auch die Reihe

$$\{f(2) - f(1)\}u_{f(1)} + \{f(3) - f(2)\}u_{f(2)} + \ldots + \{f(n+1) - f(c)\}u_{f(n)} + \ldots;$$

im Fall der Convergenz von U convergirt auch die Reihe

$$\{f(2) - f(1)\}u_{f(2)} + \{f(3) - f(2)\}u_{f(3)} + \ldots + \{f(n+1) - f(c)\}u_{fn+1} + \ldots$$

Beweis: Denkt man sich der Reihe nach die Werte der Function u_x von $x = 1$ an als Ordinaten aufgetragen, so bilden die Eckpunkte derselben eine Curve, welche sich immermehr der Abcissenaxe nähert. Bezeichnet man die Fläche, welche eingeschlossen ist von der Abscissenaxe, von den Ordinaten 1 und x und von der Curve durch w_x, so ist

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} > w_n > u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n.$$

Somit wird w_n gleichzeitig mit U unendlich werden oder endlich bleiben [1]). In folge der für $f(n)$ gemachten Voraussetzung wird $w(f_3)$ mit w_n und also auch mit U unendlich werden oder endlich bleiben.

---

1) Vergl. hierzu Cauchy, sur la convergence des séries. Exerc. de math. Bd. II. p. 221.

Ferner ist

$$\begin{aligned}
\{f(2)-f(1)\}u_{f(1)} &> w_{f(2)}-w_{f(1)} > \{f(2)-f(1)\}u_{f(2)}\\
\{f(3)-f(2)\}u_{f(2)} &> w_{f(3)}-w_{f(2)} > \{f(3)-f(2)\}u_{f(3)}\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)} &> w_{f(n+1)}-w_{f(n)}\\
&> \{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)},
\end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned}
\sum_1^n[\{f(n+1)-f(n)u_{f(n-1)} &> w_{f(n+1)}-w_{f(1)}\\
&> \sum_1^n[\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}],
\end{aligned}$$

woraus sich die Behauptung ohne Weiteres ergiebt.

Anmerkung: Es ist

$$u_{f(n)}\{f(n+1)-f(n)\} = u_{f(n)}\frac{f(n+1)-f((n)}{f(n)-f(n-1)}\ldots\{f(n)-f(n-1)\}.$$

In allen Fällen, in welchen

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{f(n)-f(n-1)}$$

stets kleiner als eine endliche Grösse k und stets grösser als eine von Null verschiedene positive Grösse k_1 ist, d. h.

$$\begin{aligned}
k_1 u_{f(n)}\{(f(n)-f(n-1)\} &< u_{f(n)}\{f(n-1)-f(n)\}\\
&< ku_{f(n)}\{f(n)-f(n-1)\},
\end{aligned}$$

wird

$$\begin{aligned}
k_1\sum_1^{n-1}[u_{f(n+1)}\{f(n+1)-f(n)\}] &< \sum_2^n[u_{f(n)}\{f(n+1)-f(n)\}]\\
&< k\sum_1^{n-1}[u_{f(n+1)}\{f(n+1)-f(n)\}].
\end{aligned}$$

Es convergiren oder divergiren demnach unter der gemachten Voraussetzung gleichzeitig mit Sicherheit die Reihen

$$\Sigma[u_{f(n)}\{f(n+1)-f(n)\}], \qquad \Sigma u_n, \qquad \Sigma[u_{f(n+1)})\{f(n+1)-f(n)\}].$$

II) Anwendungen.

1) Setzt man

$$f(x) = a^x\,(a > 1),$$

so wird

$$f(n+1)-f(n) = a^{n+1}-a^n = a^n(a-1),$$

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{f(n)-f(n-1)} = \frac{a^{n+1}-a^n}{a^n-a^{n-1}} = \frac{a^n(a-1)}{a^{n-1}(a-1)} = a,$$

$$u_{f(n)}\{f(n+1)-f(n)\} = u_{a^n}(a^{n+1}-a^n) = (a-1)a^n u_{a^n}.$$

Da der constante Factor $(a-1)$ in Rücksicht auf die Convergenz oder Divergenz ohne Einfluss ist, so convergiren oder divergiren gleichzeitig die Reihen

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

und

$$au_n+a^2u_{a^2}+\ldots+a^nu_{a^n}+\ldots$$

Für ein ganzzahliges b erhält man hieraus den p. 2. erwähnten Satz Cauchy's.

2) Die Reihe

$$a+a^2+a^3+\ldots+a^n+\ldots$$

convergirt, wie bekanntlich durch Summirung unmittelbar zu finden, wenn

$$a<1;$$

sie divergirt, wenn

$$a = \quad \text{oder} \quad >1$$

ist. Setzt man

$$f(x) = lx,$$

so wird

$$f(n+1)-f(n) = l(n+1)-l(n) = l\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\ldots$$

$$= \frac{1}{n}(1-\varepsilon_n),$$

$$\lim \varepsilon_n = 0 \quad \text{für} \quad n=\infty;$$

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{f(n)-f(n-1)} = \frac{l\left(1+\frac{1}{n}\right)}{l\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}.$$

Nun ist aber einerseits

$$\frac{l\left(1+\frac{1}{n}\right)}{l\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}<1;$$

andererseits

$$\frac{l\left(1+\frac{1}{n}\right)}{l\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} > \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n-1}},$$

$$\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2,$$

folglich

$$\frac{l\left(1+\frac{1}{n}\right)}{l\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} > \left(\frac{n-1}{n}\right)^2;$$

$$\frac{l\left(1+\frac{1}{n}\right)}{l\left(1+\frac{1}{n-a}\right)} > \tfrac{1}{4}.$$

Man erhält demgemäss unter denselben Bedingungen, wie für Σa^n die Convergenz oder Divergenz von $\Sigma\left\{\frac{a^{ln}(1-\varepsilon_n)}{n}\right\}$ und $\Sigma\frac{a_{ln}}{n}$. Setzt man

$$a = e^{la}$$
$$n = e^{ln},$$

so ist

$$\frac{a^{ln}}{n} = e^{la\,ln-ln} = e^{-ln(1-la)} = \frac{1}{n^{1-la}}.$$

Im Falle der Convergenz ist la stets negativ, im Falle der Divergenz Null oder positiv. Nennt man α den absoluten Wert von la, so erhält man die Convergenz von

$$1+\frac{1}{2^{1+\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{1+\alpha}}+\ldots,$$

die Divergenz

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

und

$$1+\frac{1}{2^{1-\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{1-\alpha}}+\ldots$$

3) Setzt man in den zuletzt genannten Reihen wieder

$$f(x) = lx,$$

so erhält man unmittelbar die Convergenz von

$$\Sigma \frac{1}{n(ln)^{1+\alpha}}$$

und, wenn man in gleicher Weise fortfährt. diejenigen von

$$\Sigma \frac{1}{nln(l_2n)^{1+\alpha}}, \quad \ldots \quad \Sigma \frac{1}{nlnl_2 \ldots (l_rn)^{1+\alpha}};$$

dagegen die Divergenz von

$$\Sigma \frac{1}{nln}, \quad \Sigma \frac{1}{nln\, l_2n}, \quad \ldots \quad \Sigma \frac{1}{nln\, l_2n \ldots l_rn}$$

und von

$$\Sigma \frac{1}{n(ln)^{1-\alpha}}, \quad \Sigma \frac{1}{nln(l_2n)^{1-\alpha}}, \quad \ldots \quad \Sigma \frac{1}{nln\, l_2n \ldots (l_2n)^{1-\alpha}},$$

4) Ist $\varphi(x)$ eine eindeutige endliche Function von x, und convergirt oder divergirt die Reihe

$$\Sigma \frac{1}{n^{1+\varphi(n)}},$$

so convergiren oder divergiren gleichzeitig auch die Reihen

$$\Sigma \frac{1}{n(ln)^{1+\varphi(ln)}}, \quad \Sigma \frac{1}{nln(l_2n)^{1+\varphi(l_2n)}}, \quad \ldots,$$

wie unmittelbar folgt, wenn man wieder

$$f(x) = lx$$

wählt. Durch dieselbe Einsetzung ist aus der Convergenz oder Divergenz der Reihen

$$\Sigma \frac{1}{n(ln)^{1+\varphi(n)}}, \quad \Sigma \frac{1}{nln(l_2n)^{1+\varphi(n)}}, \quad \ldots$$

zu schliessen auf das entsprechende Verhalten von

$$\Sigma \frac{1}{nln\,(l_2n)^{1+\varphi(n)}}, \quad \Sigma \frac{1}{nln\, l_2n\,(l_3n)^{1+\varphi(l_2)n}}, \quad \ldots$$

$$\Sigma \frac{1}{nln\, l_2n\,(l_3n)^{1+\varphi(ln)}}, \quad \Sigma \frac{1}{nln\, l_2n\, l_3n\,(l_4n)^{1+\varphi(l_2n)}}, \quad \ldots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

5) Geht man von den unter 3) abgeleiteten Reihen aus und setzt man

$$f(x) = V(x),$$

so convergirt immer die Reihe mit dem Glied

$$\frac{V(n+1)-V(n)}{V(n-1)\,l\,V(n+1)\,l_2\,V(n+1)\,\ldots\,(l_3\,V(n+1))^{1+\alpha}};$$

dagegen die Reihe mit dem Glied

$$\frac{V(n+1)-V(n)}{V(n)\,l\,V(n)\,l_2\,V(n)\,\ldots\,(l_3\,V(n))^{1+\alpha}}$$

nur dann mit Sicherheit, wenn

$$k_1 < \frac{V(n+1)-V(n)}{V(n)-V(n-1)} < k \quad \text{(Vgl. p. 68).}$$

Es divergiren immer die Reihen

$$\Sigma \frac{V(n+1)-V(n)}{V(n)\,l\,V(n)\,l_2\,V(n)\,\ldots\,l_r\,V(n)}$$

und

$$\Sigma \frac{V(n+1)\,V(n)}{V(n)\,l\,V(n)\,l_2\,V(n)\,\ldots\,(l_r\,V(n))^{1-\alpha}}$$

Wenn gleichzeitig

$$k_1 < \frac{V(n)-V(n+1)}{V(n+1)-V(n)} < k,$$

so divergiren mit Sicherheit auch

$$\Sigma \frac{V(n+1)-V(n)}{V(n+1)\,l\,V(n+1)\,\ldots\,l_r\,V(n+1)}$$

und

$$\Sigma \frac{V(n+1)-V(n)}{V(n+1)\,l\,V(n+1)\,l_2\,V(n+1)\,\ldots\,(l_r\,V(n+1))^{1-\alpha}}$$

Setzt man

$$V(n) = \frac{1}{\varphi(n)},$$

wo also $\varphi(n)$ mit wachsendem n sich der Grenze Null nähert, so convergirt stets die Reihe mit dem Glied

$$\frac{\varphi(n)-\varphi(n+1)}{\varphi(n)\,l\,\frac{1}{\varphi(n+1)}\,l_2\,\frac{1}{\varphi(n+1)}\,\ldots\left(l_r\,\frac{1}{\varphi(n)}\right)^{1+\alpha}};$$

es convergirt ebenfalls stets diejenige mit dem Glied

$$\frac{\varphi(n)-\varphi(n+1)}{\varphi(n)\,l\,\frac{1}{\varphi(n)}\,l_2\,\frac{1}{\varphi(n)}\cdots\left(l_2\,\frac{1}{\varphi(n)}\right)^{1+\alpha}} \tag{1}$$

und, sobald

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}$$

kleiner bleibt als eine endliche Grösse k. auch mit Sicherheit die Reihe

$$\Sigma\,\frac{\varphi(n)-\varphi(n+1)}{\varphi(n+1)\,l\,\frac{1}{\varphi(n)}\,l_2\,\frac{1}{\varphi(n)}\cdots\left(l_r\,\frac{1}{\varphi(n)}\right)^{1+\alpha}}.$$

Dagegen divergiren immer die Reihen mit den Gliedern

$$\frac{\varphi(n)-\varphi(n+1)}{\varphi(n+1)l\,\frac{1}{\varphi(n)}\,l_2\,\frac{1}{\varphi(n)}\cdots l_r\,\frac{1}{\varphi(n)}}.$$

und

---

1) Die obige Behauptung ist ohne weiteres klar, sobald

$$\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}$$

einen von Null verschiedenen Wert behält. Ist dagegen

$$\lim\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}=0,$$

so nimmt $\frac{1}{\varphi(n)}$ derartig zu dass $l\frac{1}{\varphi(n)}>kn$ wird, wo k eine positive endliche Zahl ist.

Denn aetzt man

$$\varphi(n)=e^{-kn},$$

so wird

$$\lim\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}=\lim\frac{e^{-k(n+1)}}{e^{-kn}}=e^{-k}.$$

In diesem Falle convergirt die Reihe in gleichem Grade wie

$$\Sigma\,\frac{1}{nln\,l_2n\,\ldots\,(l_rn)^{1+\alpha}}.$$

Wird

$$\lim\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}=0,$$

so muss

$$\varphi(n)<e^{-ku}$$

werden. Die Reihe convergirt also stärker oder doch mindestens in gleichem Grade.

$$\frac{\varphi(n)-\varphi(n+1)}{\varphi(n+1)\, l\frac{1}{\varphi(n)}\, l_2\frac{1}{\varphi(n)}\cdots\left(l_r\frac{1}{\varphi(n)}\right)^{1-\alpha}};$$

desgleichen, solange $\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}$ kleiner bleibt als eine endliche Grösse k_1 die Reihen

$$\Sigma\frac{\varphi(n)-\varphi(n+1)}{\varphi(n)\, l\frac{1}{\varphi(a)}\cdots l_r\frac{1}{\varphi(n)}}$$

und

$$\Sigma\frac{\varphi(n)-\varphi(n+1)}{\varphi(n)\, l\frac{1}{\varphi(n)}\, l_1\frac{1}{\varphi(n)}\cdots\left(l_r\frac{1}{\varphi(n)}\right)^{1-\alpha}}$$

sowie

$$\Sigma\frac{\varphi(n)-\varphi(n+1)}{\varphi(n)\, l\frac{1}{\varphi(n+1)}\, l_2\frac{1}{\varphi(n+1)}\cdots l_r\frac{1}{\varphi(n+1)}}$$

und

$$\Sigma\frac{\varphi(n)-\varphi(n+1)}{\varphi(n)\, l\frac{1}{\varphi(n+1)}\, l_2\frac{\varphi(n+1)}{1}\cdots\left(l_r\frac{1}{\varphi(n+1)}\right)^{1-\alpha}}.$$

§ 3.

Es mögen zunächst einige Bemerkungen Platz finden, welche der p. 65. citirten Abhandlung du Bois-Reymond's entnommen sind oder sich doch unmittelbar auf dieselbe stützen.

1) Wenn das Glied einer Reihe auf die Form gebracht werden kann

$$u_n = \frac{1}{\lambda_n}\left(\left(V(n)-V(n+1)\right)\right),$$

und wenn $\frac{1}{\lambda_n}$ von Null und unendlich verschieden ist, so ist die Function $V(n)$ das Mass für die Convergenz oder Divergenz der Reihe Σu_n.

Bezeichnet man nämlich mit S_n die Summe der n ersten Glieder, mit R_n den Rest der Reihe, so ist im Fall der Divergenz

$$\lim\frac{S_n}{V(n)},$$

im Fall der Convergenz

$$\lim\frac{R_n}{V(n)}$$

weder Null noch unendlich.

2) Setzt man

$$V(n) = U_n,$$

wo im Fall der Divergenz

$$U_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$
$$u_n = U_{n+1} - U_n,$$

so ist

$$\lambda_n = -1;$$

im Fall der Convergenz sei

$$U_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$
$$u_n = U_n - U_{n+1},$$

somit wird

$$\lambda_n = +1.$$

3) Bezeichnet man die entsprechenden Ausdrücke einer zweiten gleichzeitig mit U convergenten oder divergenten Reihe Σv_n durch V_n, so ist, wenn

$$\lim \frac{U_n}{V_n} = \infty, \quad \text{auch} \quad \lim \frac{u_n}{v_n} = \infty$$

Denn bliebe

$$\frac{u_n}{v_n} = \varrho_n$$

stets unterhalb einer endlichen Grenze, so würde im Fall der Divergenz sein

$$\lim \frac{U_n}{V_n} = \lim \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}}{v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1}} = \lim \frac{\varrho_1 v_1 + \varrho_2 v_2 + \ldots + \varrho_{n-1} v_{n-1}}{v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1}}$$
$$= \lim \frac{\varrho(v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1})}{v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1}} = \varrho,$$

wo ϱ ein Mittelwert ist zwischen $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{n-1}$, welcher mit diesen Grössen unterhalb derselben endlichen Grenze bleiben muss.

Im Fall der Convergenz würde man entsprechend haben

$$\lim \frac{U_n}{V_n} = \lim \frac{u_n + u_{n+1} + \ldots}{v_n + v_{n+1} + \ldots} = \lim \frac{\varrho_n v_n + \varrho_{n+1} v_{n+1} + \ldots}{v_n + v_{n+1} + \ldots}$$
$$= \lim \frac{\varrho(u_n + v_{n+1} + \ldots)}{v_n + v_{n+1} + \ldots} = \varrho,$$

wo für ϱ dasselbe gilt wie vorher.

Wenn

$$\lim \frac{U_n}{V_n} = k,$$

und wenn k eine von Null und unendlich verschiedene Grösse ist, so kann auch, wenn sich $\frac{u_n}{v_n}$ einer bestimmten Grenze nähert, diese keine andere sein als k.

Gesetzt, es sei

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = k \pm \delta.$$

Im Fall der Divergenz kann man n und m gleichzeitig unendlich werden, aber so gegen einander wachsen lassen, dass sowohl

$$\lim \frac{\sum_{m+1}^{n-1} u_n}{\sum_{1}^{m} u_n} = \infty,$$

als auch

$$\lim \frac{\sum_{m+1}^{n-1} v_n}{\sum_{1}^{m} v_n} = \infty$$

wird.

Nun ist

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}}{v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1}} = \frac{\sum_{1}^{m} u_n + \sum_{m+1}^{n-1} u_n}{\sum_{1}^{m} v_n + \sum_{m+1}^{n-1} v_n}$$

$$= \frac{\left[1 + \frac{\sum_{1}^{m} u_n}{\sum_{m+1}^{n-1} u_n}\right] \sum_{m+1}^{n-1} u_n}{\left[1 + \frac{\sum_{1}^{m} v_n}{\sum_{m+1}^{n-1} v_n}\right] \sum_{m+1}^{n-1} v_n};$$

$$\lim \frac{1 + \frac{\sum_{1}^{m} u_n}{\sum_{m+1}^{n-1} u_n}}{1 + \frac{\sum_{1}^{m} v_a}{\sum_{m+1}^{n-1} v_n}} = 1,$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} \gtrless k \pm \delta',$$

wo die beiden Ungleichheitszeichen dem Vorzeichen von δ' entsprechend sind und

$$0 < \delta' < \delta.$$

Demnach würde sein

$$\lim \frac{U_n}{V_n} \gtrless (k \pm \delta') \left\{ \lim \frac{\sum_{m+1}^{n-1} v_n}{\sum_{m+1}^{n-1} v_n} \right\}$$

$$\lim \frac{U_n}{V_n} \gtrless k \pm \delta',$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Im Fall der Convergenz führt unsere Annahme, wie leicht zu ersehen, auf denselben Widerspruch mit der Voraussetzung.

Setzt man

$$\frac{u_n}{U_n} = \alpha_n,$$

so ist

$$\lim \alpha_n = 0$$

für alle Reihen, diejenigen allein ausgenommen, welche so stark convergiren, dass

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

Für divergente Reihen ist die Behauptung ohne weiteres klar. Es braucht nur noch der Fall

$$\lim U_n = 0$$

berücksichtigt zu werden. Für diesen folgt aus

$$\frac{u_n}{U_n} = \alpha_n$$

$$\alpha_n = \frac{U_n - U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{U_{n+1}}{U_n}.$$

Wenn

$$\lim \alpha_n = 0,$$

so ist

$$\lim \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1.$$

Ferner hat man

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha_{n+1} U_{n+1}}{\alpha_n U_n}.$$

Nun ist α_n das Glied einer divergirenden Reihe [1]), somit

$$\lim \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1,$$

daher auch

$$\lim \frac{u_{n+1}}{U_n} = 1.$$

Man kann demnach durch Anwendung von Functionen, welche nur so stark abnehmen, dass

$$\lim \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1,$$

niemals gelangen zu Reihen, bei welchen

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

ist.

Wenn

$$\lim \alpha_n > 0$$

$$\lim \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1,$$

so hat

$$u_n = \alpha_n U_n$$

denselben Grad der Abnahme wie U_n. d. h. es ist auch

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

---

1) Ein Product von unendlich vielen Factoren

$$P = (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots,$$

worin die Grössen a von einer bestimmten Stelle an dasselbe Vorzeichen behalten, hat einen endlichen Wert, wenn a_n das Glied einer convergirenden Reihe ist; im entgegengesetzten Falle ist es entweder ungleich oder gleich Null, jenachdem die Grössen a alle positiv oder negativ werden. (S. Kummer, über die Convergenz der unendlichen Reihen, Crelle's Journ. Bd. 13. p. 183).

Die obige Behanptung folgt sofort aus dem angegebenen Theorem, wenn man U_n auf die Form bringt

$$U_n = U_1 \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{U_3}{U_2} \ldots \frac{U_n}{U_{n-1}} = U_1(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) \ldots (1-\alpha_{n-1}).$$

§ 4.

I. 1) Es werde zunächst die Reihe U divergent vorausgesetzt.

Bezeichnet man wieder die Fläche, welche eingeschlossen ist von der Abscissenaxe, von den Ordinaten 1 und x und von der Curve (s. Fig. 1. p. 5.), durch w_x, so ist nach § 2. I.

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-1} > w_n > u_2+u_3+\ldots u_{n-1}$$

oder

$$U_n > w_n > U_n\left(1-\frac{u_1}{U_n}\right)$$

$$\lim \frac{w_n}{U_n} = 1.$$

Bildet man ferner eine Reihe V dergestalt, dass

$$\begin{aligned} v_1 &= w_{f(2)} - w_{f(1)} \\ v_2 &= w_{f(3)} - w_{f(2)} \\ v_3 &= w_{f(4)} - w_{f(3)} \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ v_{n-1} &= w_{f(n)} - w_{f(n-1)}, \end{aligned}$$

so ist

$$v_1+v_2+\ldots+v_{n-1} = w_{f(n)}$$

oder

$$v_n = w_{f(n)} - w_{f(1)} = w_{f(n)}\left\{1-\frac{w_{f(1)}}{w_{f(n)}}\right\}$$

Endlich hat man

$$\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)} > w_{f(n+1)} - w_{f(n)} > \{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}$$

oder

$$\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)} > v_n > \{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}.$$

2) Es sei die Reihe U convergent.

Bezeichnet man den Wert, welchen die von der Ordinate x, der Abscissenaxe, der Curve und der Ordinate $x+m$ eingeschlossene Fläche für ein über jede Grenze hinauswachsendes m annimmt, mit w'_x, so ist

$$u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots > w'_n > u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots$$

oder

$$U_n > w'_n > U_n\left(1-\frac{u_n}{U_n}\right)$$

Sieht man zunächst von denjenigen Fällen der Convergenz ab, in welchen

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \text{ [1]},$$

so ist für alle übrigen nach § 3. 4)

$$\lim \frac{u_n}{U_n} = 0,$$

somit

$$\lim \frac{w'_n}{U_n} = 1.$$

Bildet man wieder eine Reihe V dergestalt, dass

$$\begin{aligned} v_n &= w'_{f(n)} - w'_{f(n+1)} \\ v_{n+1} &= w'_{f(n+1)} - w'_{f(n+2)} \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots, \end{aligned}$$

so erhält man

$$v_n + v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots = w'_{f_n}$$

oder

$$V_n = w'_{f(n)},$$

und

$$\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)} > w'_{f(n)} - w'_{f(n+1)} > \{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}$$

oder

$$\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)} > v_n > \{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}.$$

II. Es sei von einem bestimmten Wert an

$$f(n+1)-f(n) > 1,$$

dann ist offenbar

$$\lim \frac{f(n)}{n}$$

grösser oder doch mindestens gleich 1.

1) Wenn U_n und w_n über jede Grenze hinaus wachsen, d. h. die Reihe U divergirt, ist

$$\lim \frac{w_{f(n)}}{w_n}$$

grösser oder mindestens gleich 1.

Es war nun

$$\lim \frac{w_n}{U_n} = 1,$$

also

---

1) Es wird später gezeigt werden, dass auch für diese Reihen die abzuleitenden Convergenzregeln gültig bleiben.

$$\lim \frac{w_{f(1)}}{U_n} \quad \text{und} \quad \lim \frac{w_{f(n)} \left\{1 - \frac{w_{f(1)}}{w_{f(n)}}\right\}}{U_n}, \quad \text{d. i. } \lim \frac{V_n}{U_n}$$

grösser oder mindestens gleich 1.

Daraus folgt nach § 3. 3) dass

$$\lim \frac{w_{f(n+1)} - w_{f(n)}}{U_{n+1} - U_n}, \quad \text{d. i. } \lim \frac{v_n}{u_n}$$

grösser oder mindestens gleich 1 wird. Nun ist aber nach § 4. I)

$$\{f(n+1) - f(n)\} u_{f(n)} > v_n,$$

woraus hervorgeht, dass für jede divergente Reihe

$$\lim \frac{\{f(n+1) - f(n)\} f(n)}{u_n}$$

grösser oder mindestens der Einheit gleich ist.

2) Wenn dagegen U_n und w_n sich mit wachsendem n der Grenze Null nähern, d. h, die Reihe U convergirt, so ist

$$\lim \frac{wf(n)}{w_n}$$

kleiner oder höchstens gleich 1.

Es war aber

$$\lim \frac{w'_n}{U_n} = 1,$$

also

$$\lim \frac{w'f(n)}{U_n}, \quad \text{d. i. } \lim \frac{V_n}{U_n}$$

kleiner oder höchstens gleich 1.

Daraus folgt nach § 3. 3), dass

$$\lim \frac{w'_{f(n)} - w'_{f(n+1)}}{U_n - U_{n+1}}, \quad \text{d. i. } \lim \frac{v_n}{u_n}$$

kleiner oder höchstens gleich 1 ist. Nun ist aber nach § 4. I)

$$\{f(n+1) - f(n)\} u_{f(n+1)} < v_n,$$

woraus hervorgeht, dass für jede convergente Reihe, zunächst nach den § 4. I) 2) erwähnten Fall ausgenommen

$$\lim \frac{\{f(n+1) - f(n)\} u_{f(n+1)}}{u_n}$$

kleiner oder höchstens gleich der Einheit ist.

Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

Ist $f(x)$ eine eindeutige, positive, für endliche Werte von x endliche Function, welche mit wachsendem x derartig zunimmt, dass von einem bestimmten Wert an beständig

$$f(n+1)-f(n)>1$$

bleibt, so convergirt die Reihe

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots,$$

sobald

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n}<1;$$

sie divergirt, sobald

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{u_n}>1$$

wird.

Anmerkung: Wenn $f(n+1)-f(n)$ stets unter einer bestimmten endlichen Grösse k bleibt, für welche man immer eine ganze Zahl annehmen kann; wenn ferner durch $f(n)-\delta$ die unmittelbar unter $f(n)$ liegende ganze Zahl ausgedrückt wird, wobei nicht ausgeschlossen ist, dass $\delta=0$ wird, so ist $u_{f(n)}$ kleiner oder höchstens gleich $u_{f(n)-\delta}$, somit

$$u_{f(n+1)}>u_{f(n)-\delta+k+1}$$

$$\frac{u_{f(n+1)}}{u_{f(n)}}>\frac{u_{f(n)-\delta+k+1}}{u_{f(n)-\delta}}.$$

Es ist aber

$$\frac{u_{f(n)-\delta+k+1}}{u_{f(n)-\delta}}=\frac{u_{f(n)-\delta+1}}{u_{f(n)-\delta}}\cdot\frac{u_{f(n)-\delta+2}}{u_{f(n)-\delta+1}}\cdot\ldots\cdot\frac{u_{f(n)-\delta+k+1}}{u_{f(n)-\delta+k}}$$

Die einzelnen Factoren des Productes unterscheiden sich von der Einheit um negative Glieder, welche bei unendlich wachsendem n unendlich klein werden; da die Anzahl der Factoren endlich ist, wird sich auch das Product nur um eine unendlich kleine negative Grösse von der Einheit unterscheiden können. Andrerseits ist

$$u_{f(n+1)}<u_{f(n)},$$

somit

$$\lim \frac{u_{f(n+1)}}{u_{f(n)}}=1.$$

Setzt man daher in der für die Divergenz geltenden Bedingung

$$u_{f(n+1)}=\frac{u_{f(n+1)}}{u_{f(n)}}\cdot u_{f(n)}$$

so kann

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{u_n} > 1$$

ersetzt werden durch

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} > 1.$$

III) Es sei von einem bestimmten Werte an beständig

$$f(n+1)-f(n) < 1,$$

dann ist

$$\lim \frac{f(n)}{n}$$

kleiner oder höchstens gleich 1.

1) Wenn wieder U_n und w_n über jede Grenze hinaus wachsen, d. h. die Reihe U divergirt, so wird

$$\lim \frac{w_{f(n)}}{w_n}$$

kleiner oder höchstens gleich der Einheit. Es war aber

$$\lim \frac{w_n}{U_n} = 1,$$

also

$$\lim \frac{w_{f(n)}}{U_n} \quad \text{und} \quad \lim \frac{w_{f(n)}\left\{1-\frac{w_{f(1)}}{w_{f(n)}}\right\}}{U_n}, \quad \text{d. i.} \quad \lim \frac{V_n}{U_n}$$

kleiner oder höchstens gleich 1.

Daraus folgt nach § 3. 3) dass

$$\lim \frac{w_{f(n+1)}-w_{f(n)}}{U_{n+1}+U_n}, \quad \text{d. i.} \quad \lim \frac{v_n}{u_n}$$

kleiner oder höchstens gleich 1 ist.

Ferner halte man nach § 4. I) dass

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{v_n}$$

kleiner oder höchstens gleich 1 ist, woraus hervorgeht, dass für jede divergente Reihe

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{u_n}$$

und, wie aus § 4. II) Anmerkung unmittelbar folgt, auch

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n}$$

kleiner oder höchstens gleich 1 ist.

2) Wenn dagegen U_n und w'_n sich mit wachsendem n der Grenze Null nähern, d. h. die Reihe U convergirt, so ist

$$\lim \frac{w'_{f(n)}}{w'_n}$$

grösser oder doch mindestens gleich der Einheit.

Es war aber

$$\lim \frac{w'_n}{U_n} = 1,$$

also

$$\lim \frac{w'f(n)}{U_n}, \quad \text{d. i.} \quad \lim \frac{V_n}{U_n}$$

grösser oder mindestens gleich 1.

Daraus folgt nach § 3. 3) dass

$$\lim \frac{w'_{f(n)} - w'_{f(a+1)}}{U_n - U_{n+1}}, \quad \text{d. i.} \quad \lim \frac{v_n}{u_n}$$

grösser oder mindestens gleich 1 ist. Ferner hatte man nach § 4. I)

$$\lim \frac{\{f(n+1) - f(n)\}u_{f(n)}}{v_n}$$

grösser oder mindestens gleich 1, woraus hervorgeht, dass für jede convergente Reihe, zunächst nach den I) 2) erwähnten Fall ausgenommen

$$\lim \frac{\{f(n+1) - f(n)\}u_{f(n)}}{u_n}$$

grösser oder mindestens gleich 1 ist.

Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

> Ist $f(x)$ eine eindeutige positive, für endliche Werte von x endliche Function, welche mit zunehmendem x unendlich wird, aber von der Beschaffenheit, dass von einem bestimmten Werte an beständig
>
> $$f(n+1) - f(n) < 1$$
>
> bleibt, convergirt die Reihe
>
> $$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$
>
> sobald

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n(}}{u_n} > 1;$$

sie divergirt, sobald

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} < 1$$

wird.

IV) 1) Wenn von einem bestimmten Werte an

$$f(n+1)-f(n) > 1$$

bleibt, und wenn die Reihe mit dem Gliede u'_n stärker divergirt als diejenige mit dem Gliede u_n, so ist

$$\lim \frac{\dfrac{\{f(n+1)-f(n)\}u'_{f(n+1)}}{u'_n}}{\dfrac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{u_n}}$$

grösser oder mindestens gleich 1.

Denn es ist

$$\lim \frac{\dfrac{\{f(n+1)-f(n)\}u'_{f(n+1)}}{u'_n}}{\dfrac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{u_n}} = \lim \frac{\dfrac{u'_{f(n+1)}}{u'_n}}{\dfrac{u_{f(n+1)}}{u_n}}.$$

Da nun u'_x weniger stark abnimmt als u_x, so wird mit wachsendem n

$$\frac{u'_{f(n+1)}}{u'_n} > \frac{u_{f(n+1)}}{u_n},$$

somit

$$\lim \frac{\dfrac{u'_{f(n+1)}}{u'_n}}{\dfrac{u_{f(n+1)}}{u_n}}$$

grösser oder mindestens gleich 1.

Wenn die Reihe mit dem Glied u'_n stärker convergirt als diejenige mit dem Glied u_n, so ist

$$\lim \frac{\dfrac{\{f(n+1)-f(n)\}u'_{f(n)}}{u'_n}}{\dfrac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n}}$$

kleiner oder höchstens gleich 1.

Der Beweis ist dem des ersten Falles durchaus analog.

2) Wenn von einem bestimmten Werte an

$$f(n+1)-f(n)<1$$

bleibt, so ist

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u'_{f(n)}}{\dfrac{u'_n}{\{f(n+1)-f(n)u_{fn)}}}{u_n}},$$

wenn die Reihe U' stärker divergirt als U, kleiner oder höchstens gleich 1; wenn U' stärker convergirt als U, grösser oder mindestens gleich 1.

Der Beweis wird wie ad 1) geführt.

Wenn daher für irgend welche Reihe eine Function f_n gefunden ist, deren Anwendung eine Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz gestattet, so entscheidet die Anwendung derselben Function auch für jede Reihe, welche stärker divergirt oder stärker convergirt als die erstere.

V) Es werde gesetzt, einmal

$$f(n) = \varphi(n),$$

das andre Mal

$$f(n) = \psi(n);$$

es sei ferner von einem bestimmten Werte an

$$\varphi(n+1)-\varphi(n) > \psi(n+1)-\psi(n)$$

und daher

$$\lim \frac{\varphi(n)}{\psi(n)}$$

grösser oder mindestens gleich 1 [1]).

1) Im Falle der Divergenz von U ist, wenn die Bezeichnungen von § 4. I. angewandt werden,

$$\{\varphi n+1)-\varphi(n)\} > w_{\varphi(n+1)}-w_{\varphi(n)} > \{\varphi(n+1)-\varphi(n)\}u_{\varphi(n+1)}$$
$$\{\psi(n+1)-\psi(n)\}u_{\psi(n)} > w_{\varphi(n+1)}-w_{\psi(n)} > \{\psi(n+1)-\psi(n)\}u_{\psi(n+1)}.$$

---

1) Die Functionen $\varphi(n)$ und $\psi(n)$ brauchen nur die in § 1. I. für $f(n)$ gestellten Bedingungen zu erfüllen; es bleibt also gleichgültig, ob

$$\varphi(n+1)-\varphi(n), \quad \text{resp.} \quad \psi(n+1)-\psi(n)$$

von einem gewissen Werte an grösser oder kleiner als die Einheit sind.

Nun ist aber

$$\lim \frac{w_{\varphi(n)}}{w_{\psi(n)}} \quad \text{und} \quad \lim \frac{w_{\varphi(a)} \left\{1 - \frac{w_{\varphi(1)}}{w_{\varphi(n)}}\right\}}{w_{\psi(n)} \left\{1 - \frac{w_{\psi(1)}}{w_{\psi(n)}}\right\}},$$

somit auch

$$\lim \frac{w_{\varphi(n+1)} - w_{\varphi(n)}}{w_{\psi(n+1)} - w_{\psi(n)}}$$

grösser oder mindestens gleich 1, woraus folgt, dass für jede divergente Reihe U

$$\lim \frac{\{\varphi(n+1) - \varphi(n)\} u_{\varphi(n)}}{\{\psi(n+1) - \psi(n)\} u_{\psi(n)+1}}$$

grösser oder mindestens gleich 1 ist.

2) Im Fall der Convergenz von U erhält man entsprechend, wie in Rücksicht auf § 4. I. 2) ohne weiteres klar ist, dass

$$\lim \frac{\{\varphi(n+1) - \varphi(n)\} u_{\varphi(n+1)}}{\{\psi(n+1) - \psi(n)\} u_{\psi(n)}}$$

kleiner oder höchstens gleich 1 ist.

Anmerkung: Wenn $\varphi(n+1) - \varphi(n)$ und demnach auch $\psi(n+1) - \psi(n)$ stets unterhalb einer endlichen Grenze k bleiben, so kann, wie aus § 4. II) Anm. unmittelbar folgt, sowohl

$$\lim \frac{\{\varphi(n+1) - \varphi(n)\} u_{\varphi(n)}}{\{\psi(n+1) - \psi(n)\} u_{\psi(n+1)}}$$

als auch

$$\lim \frac{\{\varphi(n+1) - \varphi(n)\} u_{\varphi(n+1)}}{\{\psi(n+1) - \psi(n)\} u_{\psi(n)}}$$

ersetzt werden durch

$$\lim \frac{\{\varphi(n+1) - \varphi(n)\} u_{\varphi(n)}}{\{\psi(n+1) - \psi(n)\} u_{\psi(n)}}.$$

VI) Mit Hilfe der unter IV) und V) abgeleiteten Sätze lässt sich nun zeigen, dass die unter II) und III) gebildeten Convergenzregeln auch ihre Gültigkeit behalten für die Reihen, bei denen

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

bleibt; sodass also die durch den Ausschluss dieser Reihen der Anwendung der Kriterien notwendig vorangehende Untersuchung des $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ausnahmslos wegfallen kann.

1) Wenn von einem bestimmten Werte an

$$f(n+1)-f(n)>1$$

bleibt, so folgt aus der Ableitung in II) 2), dass, wie in allen übrigen convergenten Reihen auch hier

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{u_n}$$

nur kleiner oder höchstens gleich 1 sein kann. Man hat nur, wie aus I) 2)

$$U_n > u'_n > U_n\left(1-\frac{u_n}{U_n}\right)$$

wegen

$$\lim \frac{u_n}{U_n} > 0$$

hervorgeht, statt

$$\lim \frac{u'_n}{U_n} = 1$$

zu setzen

$$\lim \frac{u'_n}{U_n}$$

kleiner oder gleich 1, wodurch an der weiteren Entwickelung aber nichts geändert wird.

Es lässt sich übrigens leicht zeigen, dass, sobald auch

$$\lim\{f(n+1)-f(n)\}>1$$

ist, für die Reihen der zu betrachtenden Art stets

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{u_n}$$

wird.

Denn setzt man

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_n}$$

$$\lim \alpha_n > 0,$$

$$0 < \alpha < \lim \alpha_n,$$

so convergirt die Reihe U stärker als diejenige mit dem Glied $u'_n = \frac{1}{(1+\alpha)^n}$. Für die letztere wird aber

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u'_{f(n+1)}}{u'_n} = \frac{\{f(n+1)-f(n)\}(1+\alpha)^n}{(1+\alpha)^{f(n+1)}}$$

Ist

$$\lim\{f(n+1)-f(n)\}=\infty,$$

so wird

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}(1+\alpha)^n}{(1+\alpha)^{f(n+1)}}<\frac{\{f(n+1)-f(n)\}(1+\alpha)^{f(n)}}{(1+\alpha)^{f(n+1)}}$$

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}(1+\alpha)^n}{(1+\alpha)^{f(n+1)}}<\frac{f(n+1)-f(n)}{(1+\alpha)^{f(n+1)-f(n)}}.$$

Der Ausdruck rechts hat aber die Null zur Grenze, man erhält also denselben Grenzwert für

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{u_n}.$$

Ist

$$1<\lim\{f(n+1)-f(n)\}<k,$$

so kann man setzen

$$f(n)=n+\chi(n),$$
$$\lim\chi(n)=\infty,$$

und es wird

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}(1+\alpha)^n}{(1+\alpha)^{f(n+1)}}<\frac{k(1+\alpha)^n}{(1+\alpha)^{n+1+\chi(n+1)}},$$

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}(1+\alpha)^n}{(1+\alpha)^{f(n+1)}}<\frac{k}{(1+\alpha)^{1+\chi(n+1)}},$$

wo sich der Ausdruck rechts wieder der Grenze Null nähert.

2) Ist

$$f(n+1)-f(n)<1$$

so unterscheide man zunächst den Fall, dass

$$\lim\{f(n+1)-f(n)\}=1$$

wird. Setzt man

$$f(n)=n-\chi(n),$$

so wird

$$\lim\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n}=\lim\frac{u_{n-\chi(n)}}{u_n},$$

welcher Grenzwert niemals kleiner werden kann als 1.

Ist

$$k<\lim\{f(n+1)-f(n)\}<1$$
$$k>0,$$

so wird, wenn man wieder

$$f(n)=n-\chi(n).$$

setzt,

$$\lim \chi(n) = \infty.$$

Führt man, wie unter 1) die schwächer convergirende Reihe mit dem Glied $u'_n = \frac{1}{(1+\alpha)^n}$ ein, dann ist

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u'_{f(n)}}{u'_n} = \frac{\{f(n+1)-f(n)\}f(1+\alpha)^n}{(1+\alpha)^{f(n)}}$$
$$= \{f(n+1)-f(n)\}(1+\alpha)^{\chi(n)}.$$

Der letzte Ausdruck wächst aber über jede Grenze hinaus, somit auch

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n}.$$

Es sei schliesslich

$$\lim\{f(n+1)-f(n)\} = 0.$$

Die Reihe mit dem Glied $u'_n = \frac{1}{n^{1+\alpha}}$, für welche

$$\lim \frac{u'_{n+1}}{u'_n} = 1,$$

convergirt schwächer als die Reihe U, für welche

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

bleibt. Setzt man für die erstere Reihe

$$f(n) = \beta n$$
$$0 < \beta < 1,$$

so wird

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u'_{f(n)}}{u'_n} = \frac{\{\beta(n+1)-\beta n\}n^{1+\alpha}}{(\beta n)^{1+\alpha}} = \frac{1}{\beta_\alpha}$$

stets grösser sein als die Einheit. Es wird also, wenn

$$\lim\{f(n+1)-f(n)\} = 0$$

und daher

$$f(n) < \beta n,$$

erst recht sein

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u'_{f(n)}}{u'_n} > 1,$$

also auch nach IV) 2)

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} > 1.$$

§ 5.

I) Wenn von einem bestimmten Werte an

$$\varphi(n+1)-\varphi(n)<1$$
$$\psi(n+1)-\psi(n)<1$$

bleibt; wenn man ferner berücksichtigt, dass

$$\frac{\{\varphi(n+1)-\varphi(n)\}u_{\varphi(n)}}{\{\psi(n+1)-\psi(n)\}u_{\psi(n)}}=\frac{\dfrac{\{\varphi(n+1)-\varphi(n)\}u_{\varphi(n)}}{u_n}}{\dfrac{(\psi(n+1)-\psi(n)\}u_{\psi(n(}}{u_n}},$$

so geht aus den Erörterungen des § 1. V) hervor, dass für den Fall

$$f(n+1)-f(n)<1$$

die Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz um so sicherer geliefert wird, je schwächer zunehmende Functionen $f(n)$ man wählt. Dass es für jede Reihe mit Sicherheit entscheidende Functionen giebt, ist daraus zu entnehmen, dass, wie schwach auch die Zunahme oder Abnahme von U_n und w_n ist, es doch immer Functionen $f(n)$ giebt, dergestalt, dass

$$\lim\frac{w_{f(n)}}{w_n}<1,$$

$$\lim\frac{w'_{f(n)}}{w'_n}>1$$

würde.

Sind nämlich ϑ_n und ϑ'_n irgend welche positive, eindeutige, endliche Functionen, deren Grenzwert für die erstere kleiner, für die zweite grösser als die Einheit ist, so würde die Auflösung der Gleichung

$$w_x=\vartheta_n w_n$$

resp.

$$w'_x=\vartheta'_n w'_n$$

für x Functionen von der geforderten Beschaffenheit liefern.

Ist aber

$$\lim\frac{w_{f(n)}}{w_n}<1,$$

so ist nach § 4. I) auch

$$\lim\frac{V_n}{U_n}<1,$$

somit auch

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} < 1.$$

Entsprechend wird für

$$\lim \frac{w'_{f(n)}}{w'_n} > 1$$

auch

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} > 1.$$

Für diejenigen Functionen $f(n)$, für welche

$$f(n+1)-f(n) > 1$$

ist, lässt sich die entsprechende Behauptung nicht ohne weiteres allgemein aufstellen, sondern sie wird beschränkt bleiben müssen auf das Gebiet, in welchem

$$1 < f(n+1)-f(n) > k$$

bleibt, innerhalb dessen von höhern und niedern Graden der Zunahme füglich nicht geredet werden kann.

Bei allen divergenten Reihen würde die Anwendung von

$$f(n) = U_n$$

selbst genügen. Denn dann ist

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} = \frac{\{U_{n+1}-U_n\}u_{U_n}}{u_n} = u_{U_n},$$

also

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} = 0.$$

II) Innerhalb des Gebietes der Convergenz und Divergenz, welches von den gebräuchlichen logarithmischen Kriterien beherrscht wird, reicht die Wahl von

$$f(n) = e^n (f(n+1)-f(n) > 1)$$

und von

$$f(n) = l_n (f(n+1)-f(n) < 1)$$

aus.

1) Es sei

$$f(n) = e^n.$$

Bildet man den Ausdruck $\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{u_n}$ für die divergente Reihe mit dem Glied

$$\frac{1}{n l n l_2 n \ldots l_r n},$$

so ist

$$\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)} = \frac{e^{n+1}-e^n}{e^{n+1}le^{n+1}l_2e^{n+1}\ldots l_re^{n+1}}$$

$$= \frac{e^n(e-1)}{e^{n+1}(n+1)l(n+1)l_2(n+1)\ldots l_{r-1}(n+1)}$$

und

$$\frac{\{fn+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{u_n} = \frac{e-1}{e}\cdot\frac{nln\,l_2n\ldots l_{r-1}n\,l_rn}{(n+1)l(n+1)l_2(n+1)\ldots l_{r-1}(n+1)}$$

daher

$$\lim\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{u_n} = \infty.$$

Bildet man den Ausdruck $\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n}$ für die convergente Reihe mit dem Glied

$$\frac{1}{nln\,l_2n\ldots(l_rn)^{1+\alpha}},$$

so ist

$$\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)} = \frac{e^{n+1}-e^n}{e^n le^n l_2e^n\ldots(l_re^n)^{1+\alpha}} = \frac{e-1}{nln\,l_2n\ldots(l_{r-1}n)^{1+\alpha}}$$

und

$$\frac{\{fn+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} = \frac{(e-1)nln\,l_2n\ldots(l_rn)^{1+\alpha}}{nln\,l_2n\ldots(l_{r-1}n)^{1+\alpha}},$$

daher

$$\lim\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} = 0.$$

2) Es sei

$$f(n) = ln;$$

dann ist für die Reihe $\Sigma\frac{1}{nln\,l_2n\ldots l_rn}$

$$\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)} = \frac{l(n+1)-ln}{nln\,l_2n\ldots l_rn\,l_{r+1}n}.$$

Man hat nun

$$l(n+1)-ln = l\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\ldots = \frac{1-\varepsilon_n}{n},$$

$$\lim\varepsilon_n = 0,$$

somit

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} = \frac{1-\varepsilon_n}{nln\,l_2n\ldots l_rn\,l_{r-1}n}$$

und

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} = (1-\varepsilon_n)\,\frac{nln\,l_2n\ldots l_rn}{nln\,l_2n\ldots l_rn\,l_{r-1}n},$$

daher

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} = 0.$$

In Bezug auf die Reihe $\Sigma \frac{1}{nln\,l_2n\ldots(l_rn)^{1+\alpha}}$ ist

$$\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)} = \frac{1-\varepsilon_n}{nln\,l_2n\ldots l_rn\,(l_{r+1}n)^{1+\alpha}}$$

und

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} = (1-\varepsilon_n)\,\frac{nln\,l_2n\ldots(l_rn)^{1+\alpha}}{nln\,l_2n\ldots l_rn(l_{r+1}n)^{1+\alpha}},$$

also

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} = \varkappa.$$

III) Würde die Anwendung von

$$f(n) = ln$$

führen zu

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} = 1,$$

dann würde die Function w_n so langsam zu- oder abnehmen, dass

$$\lim \frac{w_{ln}}{w_n} = 1$$

werden würde. Denselben Grenzwert würde $\frac{w_{lm}}{w_m}$ haben, wenn m irgend eine gleichzeitig mit n unendlich werdende Zahl bedeutet. Daraus folgt, dass auch

$$\lim \frac{w_{l_2n}}{w_{ln}} = 1$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\lim \frac{w_{l_rm}}{w_{r-1}^{l}{}^{n}} = 1$$

sein würde, somit auch

$$\frac{w_{l_rn}}{w_n}$$

demselben Grenzwert sich nähern würde.

Entsprechend würde auch

$$\lim \frac{w_n}{w_{e^n}}$$

und, wenn man e^{e^n} durch $e_2{}^n$ bezeichnet,

$$\lim \frac{w_{e^n}}{w_{e_2{}^n}}, \ \ldots \ \lim \frac{we_{r-1}{}^n}{w_{e_r{}^n}}$$

gleich 1 sein, somit auch

$$\lim \frac{w_n}{w_{e_r{}^n}} \quad \text{und} \quad \lim \frac{wl_r{}^n}{w_{e_r{}^n}}$$

In allen anderen Fällen der Convergenz oder Divergenz, in denen

$$\lim \frac{w_r{}^n}{w_{e_r{}^n}}$$

grösser oder kleiner als 1 ist, genügt demnach die Wahl von

$$f(n) = ln.$$

Es folgt aus der vorhergehenden Erörterung noch, dass, wenn diese Wahl nicht ausreicht, auch die von $l_2{}^n$, $l_3{}^n$, $\ldots$ $l_r{}^n$ keine Entscheidung liefert.

IV) Aus § 4) V) geht unmittelbar hervor, dass die unter § 4. II) und III) abgeleiteten Convergenzregeln sich noch unter folgender Form verallgemeinern lassen:

> Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ eindeutige, positive, für endliche Werte von x endliche, mit x unendlich werdende Functionen; ist ferner von einem bestimmten Wert an
>
> $$\varphi(n+1) - \varphi(n > V(n+1) - V(n),$$
>
> so convergirt die Reihe U, sobald
>
> $$\lim \frac{\{\varphi(n+1) - \varphi(n)\} u_{\varphi(n)}}{\{\psi(n+1) - \psi(n)\} u_{\psi(n+1)}} < 1,$$
>
> sie divergirt, sobald
>
> $$\lim \frac{\{\varphi(n+1) - \varphi(n)\} u_{\varphi(n+2)}}{\{\psi(n+1) - \psi(n)\} u_{\psi(n)}} > 1$$
>
> ist.

Es ist zu lesen:

S. 63. Z. 3. v. u. und Anm. Z. 2. Morgan st. Morgau.

Anm. Z. 1. d'analyse st. de analyse.

S. 66. Z. 7. v. o. Morgán st. Morgau.

S. 67. Z. 12. v. ob. $x = \infty$ st. $x = 0$.

Z. 14. u. 11. v. u. $f(n)$ st. $f(c)$.

Z. 2. v. u. $w_{f(n)}$ st. $w(f_3)$.

S. 68. Z. 7. v. o. $u_{f(n)}$ st. $u_{f(n-1)}$.

Z. 12. v. u. $u_{f(n)}\{f(n+1)-f(n)\}$ st. $u_{f(n)}\{f(n-1)-f(n)\}$

S. 69. Z. 10. v. o. a st. b.

S. 71. Z. 5. v. u. $nln\,(l_2 n)^{1+\varphi(ln)}$ st. $nln\,(l_2 n)^{1+\varphi(n)}$.

S. 72. Z. 2. v. o. $(l_r V(n+1))^{1+\alpha}$ st. $(l_3 V(n+1))^{1+\alpha}$.

S. 78. Z. 4. v. o. $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ st. $\frac{u_{n+1}}{U_n}$

Anm. Z. 5. unendlich st. ungleich.

S. 79. Z. 5. v. o. (s. Fig. 1., pag. 5.) ist zu streichen.

Z. 15. v. u. V_n st. v_n.

S. 81. Z. 1. v. o. $\frac{w_{f(n)}}{U_n}$ st. $\frac{w_{f(1)}}{U_n}$.

Z. 6. v. o. $> v_n$ st. $> u_n$.

S. 82. Z. 18. u. ff. v. o. $u_{f(n)-\delta}$, $u_{f(n)-\delta+1}$ etc. st. $u_{f(n)}-\delta$, $u_{f(n)}-\delta+1$ etc.

S. 88. Z. 9. v. u. ist nach $\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{u_n}$ hinzuzufügen $= 0$.

S. 91. Z. 7. v. o. § 4. st. § 1.

S. 92. Z. 11. v. o. $< k$ st. $> k$.

S. 93. Z. 7. v. u. $l_n l_2 n \ldots l_r n\, l_{r+1} n$ st. $nln l_2 n \ldots l_r n\, l_{r+1} n$.

Z. 2. v. u. $\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)} = \frac{1-\varepsilon_n}{nln l_2 n \ldots l_r n\, l_{r+1} n}$

st. $\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} = \frac{1-\varepsilon_n}{nln\, l_2 n \ldots l_r n\; l_{r-1} n}$.

S. 94. Z. 1. v. o. $l_{r+1} n$ st. $l_{r-1} n$.

Z. 4. v. u. und ff. $w_{l_r n}$ st. $w l_{rn}$ resp. $w_{l_r} n$.

S. 95. Z. 6. u. 9. v. o. $w_{l_r n}$ st. $w l_r^n$ resp. $w_r{}^n$.

Z. 6. v. u. $\psi(n+1)-\psi(n)$ st. $V(n+1)-V(n)$.